Si on essayait de penser vectoriellement ? Vecteur : véhicule, sens, direction, flèche du temps, index de mouvement ou de transformation.

La Géométrie Analytique, comme Programme pour faire fleurir le désert

I REPÈRE DU PLAN_

1° DÉFINITION

On appelle repère du plan, tout triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que O désigne un point du plan et $\vec{i}$, $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires

Le point O est appelé **origine** du repère ; les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ constituent une **base** de l'ensemble des vecteurs du plan.
Si l'on désigne par I et J les deux points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, on remarque que les points O, I et J ne sont pas alignés.
Ainsi la donnée de trois points non alignés du plan permet de définir un repère de ce plan.

2° REPÈRES PARTICULIERS

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthogonal** si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormal** (ou **orthonormé**) si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même longueur.

II COORDONNÉES D'UN POINT DU PLAN

1° DÉFINITION

Soit M un point quelconque du plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Désignons par P la projection du point M sur la droite (OI) parallèlement à (OJ), et par Q la projection de M sur (OJ) parallèlement à (OI).
On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

Or il existe deux nombres (qu'on appellera réels) x et y uniques tels que :

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} \text{ et } \overrightarrow{OQ} = y\,\vec{j}.$$

$\cos \frac{2\pi}{5}$

D'où

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Les réels x et y sont appelés les **coordonnées** du point M dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$;
le réel x est l'**abscisse** du point M et y son **ordonnée**.

Les coordonnées d'un point M du plan dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ sont les réels uniques x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

S'il n' y a aucune ambiguïté sur le repère, le point sur le repère, le point M de coordonnées x et y est noté M(x, y)

M(x, y) dans le repère $(O; \vec{i};\ \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

Remarque

D'après ce qui précède, à tout point M du plan muni d'un repère correspond un couple unique (x, y) de nombres et réciproquement.

III COORDONNÉES D'UN VECTEUR DU PLAN

1° DÉFINITION

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un seul point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Si x et y désignent les coordonnées du point M dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on a

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Les vecteurs $x\,\vec{i}$ et $y\,\vec{j}$ sont appelés les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$.

Les réels x et y sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Le réel x est la première coordonnée de $\vec{u}$ et y la seconde coordonnée.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ du plan dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les réels uniques x et y tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

S'il n' y a aucune ambiguïté sur la base, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées x et y est noté $\vec{u}(x, y)$.

$$\vec{u}(x, y) \text{ dans la base } (\vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

2° REMARQUE

Deux vecteurs sont égaux si , et seulement si, leurs coordonnées respectives sont égales.

$$\vec{u}(x, y) = \vec{v}(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Cas particulier
Le vecteur nul s'écrit dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sous la forme $\vec{O} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$.
Le vecteur nul a donc pour coordonnées (0, 0). Par conséquent,

$$\vec{u}(x, y) = \vec{O} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

3° COORDONNÉE DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{cases} \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ \vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} \end{cases}$$

D'où

$$\vec{u} + \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$$

soit

$$\cos\frac{2\pi}{5}$$

Si on essayait de penser vectoriellement ? Vecteur : véhicule, sens, direction, flèche du temps, index de mouvement ou de transformation.

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\,\vec{i} + (y + y')\,\vec{j}$$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a donc pour coordonnées $(x + x', y + y')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

4° COORDONNÉES DU PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Soit un vecteur $\vec{u}(x, y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et un réel a.

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

D'où $$a\,\vec{u} = a(x\,\vec{i} + y\,\vec{j})$$

Soit $$a\,\vec{u} = (ax)\,\vec{i} + (ay)\,\vec{j}.$$

Le vecteur $a\vec{u}$ a donc pour coordonnées (ax, ay) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$ alors $a\,\vec{u}\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$

IV COORDONNÉES D'UN VECTEUR DÉFINI PAR UN REPRÉSENTANT

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Recherchons les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\cos \frac{2\pi}{5}$

$$\overrightarrow{OA} = x_A\,\overrightarrow{i} + y_A\,\overrightarrow{j} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = x_B\,\overrightarrow{i} + y_B\,\overrightarrow{j}$$

Sachant que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

on en déduit

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{j}\,.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A)$ et $(y_B - y_A)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, si A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

V_ COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, considérons les deux points $A(x_A , y_A)$ et $B(x_B , y_B)$.

Recherchons les coordonnées (x_I, y_I) du point I milieu du segment $[AB]$.

Le point I peut être caractérisé par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

D'où

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

L'abscisse (respectivement l'ordonnée) du milieu d'un segment est égale à la demi-somme des abscisses (respectivement des ordonnées) des extrémités du segment.

VI CONDITION DE COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

THÉORÈME

Deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si, et seulement si, le réel $xy' - yx'$ est nul.

VII ORTHOGONALITÉ

Dans un repère orthonormal, deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont orthogonaux si , et seulement si, $xx' + yy' = 0$

Dans le plan muni d'un repère *orthonormal* $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la distance du point $A(x_A, y_A)$ au point $B(x_B ; y_B)$ est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Dans le plan muni d'un repère *orthonormal* $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la distance du point $A(x, y)$ à l'origine O du repère est donnée par $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\cos \frac{2\pi}{5}$

Si on essayait de penser vectoriellement ? Vecteur : véhicule, sens, direction, flèche du temps, index de mouvement ou de transformation.

Trait d'union entre vecteurs et fonctions "Somethin'else"

Partie I

Soient trois points A, B et C non alignés d'un plan ξ.

On sait qu'un vecteur est caractérisé par la donnée de ses coordonnées dans une base. C'est une notion essentielle vue en classe de seconde.

On muni le plan ξ d'un repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).

1° Déterminer les coordonnées d'un point M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$

2° On suppose que I est milieu de [BC].

a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire les coordonnées de I.

3° a) Montrer en partant de l'égalité : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$ que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (sans utiliser les coordonnées)

b) Que peut- on conclure ?

c) Vérifier que la somme des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, est nulle.

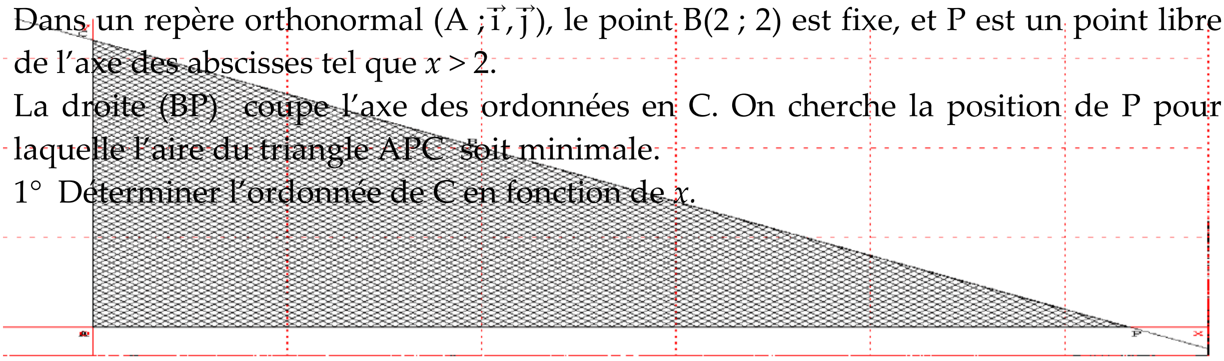
4° Déterminer les coordonnée d'un point N tel que le quadrilatère ANBC soit un parallélogramme.

Partie II

Dans un repère orthonormal (A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), le point B(2 ; 2) est fixe, et P est un point libre de l'axe des abscisses tel que $x > 2$.

La droite (BP) coupe l'axe des ordonnées en C. On cherche la position de P pour laquelle l'aire du triangle APC soit minimale.

1° Déterminer l'ordonnée de C en fonction de x.



2° On note $f(x)$ l'aire du triangle PAC, exprimée en cm²

a) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

b) Démonter en factorisant $f(x) - f(4)$ que la fonction f admet sur l'intervalle]2 ; + ∞[, un minimum.

c) Calculer $f(4)$ lorsque $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$ pour tout $x > 2$.

$\cos \dfrac{2\pi}{5}$

Si on essayait de penser vectoriellement ? Vecteur : véhicule, sens, direction, flèche du temps, index de mouvement ou de transformation.

Quel beau sujet de dispute sophistiqué tu nous apportes là, ami ; c'est la théorie selon laquelle on ne peut chercher ni ce qu'on connaît, ni ce qu'on ne connais pas : ce qu'on connaît parce que, le connaissant, on n'a pas besoin de le chercher, ce qu'on ne connaît pas parce qu'on ne sait même pas ce qu'on doit chercher.

Correction

Partie I

1° **Coordonnées de M** tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$. **(1)**

D'après le cours, un vecteur est caractérisé par la donnée de ses coordonnées dans une base.

Autrement dit : $M(x\,;\,y) \in (A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ avec, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. D'après la relation dite de Chasles, pour tout point A du plan,

$$\begin{cases}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\end{cases}$$

d'où

d'après (1), $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

soit, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **(2)**, donc: $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2° **Coordonnées de I.**

$$I(x\,;\,y) \in (A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$

I milieu de [BC] se traduit par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **(3)** , donc $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Remarque : De la relation **(3),** il en résulte que : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$

3° **Montrons que** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

Nous avons vu que

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ 2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \end{cases}$, donc $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

On peut dire que le point M est centre de gravité du triangle ABC. L'égalité :

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ indique que le centre de gravité M est situé au deux tiers de sa médiane [AI], à partir du sommet A.

On vérifie immédiatement étant donné, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{O}$ se traduit par $\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$

4° **Coordonnées de N** tel que ANBC est un parallélogramme.

ANBC est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB}$, or pour tout point A du plan, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ en vertu de la relation dite de Chasles, d'où $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Il en résulte que N(1 ; – 1) dans la base ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$).

$\cos \dfrac{2\pi}{5}$

Partie II

Commençons par traduire l'énoncé.

$\{A\} = (BP) \cap (Ay)$: Traduction, le point A intercepte les droites (BP) et l'axe (Ay), appelé axe des ordonnées.

C, étant situé sur l'axe des ordonnées, son abscisse est nulle, d'où C(0 ; y_C). Par ailleurs, P est situé sur l'axe des abscisses, il résulte que son ordonnée est nulle. D'où, P(x ; 0), avec $x > 2$, par hypothèse.

Il s'agit donc d'exprimer y_C en fonction de x.

On sait que les points C, B et P sont alignés. En d'autres termes, les vecteurs formés par ces points sont colinéaires. Il faut par conséquent vérifier la condition de colinéarité. Rappelons que deux vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, si et seulement si $XY' = X'Y$.

Application : $\vec{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ y_C - 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{BP}\begin{pmatrix} x-2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{BC}$ et $\vec{BP}$ sont dits colinéaires si et seulement si : $(y_C - 2)(x - 2) = 4$, d'où, pour tout $x > 2$, $y_C - 2 = \dfrac{4}{x-2}$ soit, $y_C = 2 + \dfrac{4}{x-2}$, donc $y_C = \dfrac{2x}{x-2}$

Remarquons que l'expression de y_C a un sens, car, son dénominateur est non nul. En effet, $x > 2$ par hypothèse, donc $x - 2 > 0$, et peut difficilement s'annuler !!!!

2° Attaquons-nous maintenant à l'aire du triangle ACP

Le repère $(A\,;\vec{i},\ \vec{j})$ étant orthogonal, il s'ensuit que ACP est rectangle en A. De plus, l'aire d'un triangle est égale au demi produit d'un côté par sa hauteur correspondante. Traduction : $f(x) = \frac{1}{2}AC \times AP$, avec $AC = y_C = \frac{2x}{x-2}$ et $AP = x$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x-2} \times x = \frac{x^2}{x-2}.$$

Remarquons que la fonction f est bien définie pour tout $x > 2$

Détermination du minimum.

$$f(x) - f(4) = \frac{x^2}{x-2} - \frac{4^2}{4-2} = \frac{x^2}{x-2} - 8 \times \left(\frac{x-2}{x-2}\right) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x-2} = \frac{(x-4)^2}{x-2}$$

Étudions sur $]2\,;+\infty[$, le signe de $\frac{(x-4)^2}{x-2}$. $(x-4)^2 \geq 0$ et $x - 2 > 0$, donc, pour tout $x > 2$, $f(x) \geq f(4)$.Il en résulte que la fonction f admet sur $]2\,;+\infty[$, un minimum égal à $f(4) = 8$, au point d'abscisse $x_0 = 4$.