Visite guidée au pays merveilleux des fonctions

Dérivation

Introduction _ Un peu d'histoire des sciences

Désignons par $f(t)$, la position d'une voiture à l'instant t. À l'instant $(t + h)$, la voiture a parcouru la distance $f(t + h) - f(t)$.

Nous appelons *vitesse moyenne* du véhicule entre les instants t et $(t + h)$, la quantité :

$$V_h(t) = \frac{\textit{distance parcourue}}{\textit{temps}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Lorsque $h \longrightarrow 0$, on obtient la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
Si cette dernière admet une limite finie, on l'appelle *vitesse instantanée* à l'instant t. Cette valeur est affichée sur le tableau de bord de votre voiture.

En mathématiques, cette quantité s'appelle *dérivée* de la fonction f et se note $f'(t)$.

Bien qu'abordé par Pierre de Fermat (1601 – 1665) et Isaac Barrow (1630 – 1677) qui fut le prédécesseur de Newton à la chaire de mathématiques de Cambridge, le calcul infinitésimal (appelé *dérivation* aujourd'hui) fut crée de manière indépendante par Isaac Newton (1642 – 1727) et Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716).

Ce sont des recherches en cinématique et en mécanique qui amènent Newton à s'intéresser aux variations des quantités infiniment petites (la célèbre relation entre la *force, la masse* et *l'accélération* introduite par Newton permet de généraliser le phénomène de pesanteur et de formaliser mathématiquement le *comment* du mouvement des corps ; or mouvement signifie *variation* de la position de l'objet en fonction des variations du temps).

Naturellement, il s'intéressa à l'opération inverse qui consiste à *additionner indéfiniment* des quantités infinitésimales : c'est le point de départ du *calcul intégral* que vous verrez en terminale.

Motivé par des travaux en géométrie (*quadrature des coniques*) de Blaise Pascal (1623 – 1662), Leibniz découvre et formalise le concept du rapport des « *différences* » et jette les premières bases du *Calcul différentiel* (étudié dans le supérieur). En abordant le calcul de surface comme une somme infinie d'aires de rectangles, Leibniz introduit alors la notion d'*intégrale définie.*

C'est aussi à Leibniz que nous devons les notations : $\frac{d}{dx}$, dx et $\int$.

Il faut attendre jusqu'au XVIII^{e} siècle pour que la *dérivée* soit définie d'une manière rigoureuse en terme de *limite* du taux de variation grâce aux travaux importants d'Augustin Cauchy (1789 – 1857) sur le concept formel de *limite* et de *continuité.*

Je ne peux passer sous silence, les travaux du mathématicien Bernard Bolzano (1781 – 1859) sur les relations entre continuité et dérivabilité. Ce savant découvre l'existence des fonctions continues mais dérivables nulle part.

Le moment est venu de révéler un secret professionnel. Ce qui fait progresser, en mathématique, mais plus généralement en science, c'est d'inventer des concepts, et cette invention se fait toujours dans la solitude, l'indépendance et la liberté, oui, dans le silence. Chaque jour, en me levant, je dois exalter la magnificence d'une vie consacrée minute par minute, dans l'enthousiasme, à une œuvre dont je ne saurai sans doute jamais vraiment ce qu'elle vaut ; dubitative et fragile merveille.

I _ Dérivée en un point. Fonction dérivée

I.I Dérivée en un point

Définition 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in$ I et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une quantité finie notée $f'(x_0)$ telle que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

(Ce qui revient à dire que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, où l'on a posé $h = x - x_0$.)

L'expression $f'(x_0)$ s'appelle la dérivée de f entre x et x_0.
Donc f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux de variation admet une limite finie lorsque $x \longrightarrow x_0$.

Customarily, the anticipation, the projection, the fantasy and image exceed realisation.

_ *Habituellement, l'anticipation, la fantaisie et l'image dépassent la réalisation.*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{2x - 4}$;

1° _ Le but est d'Étudier la fonction f et de construire sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

α) _ Montrer que pour tout $x \in$ D, $f'(x) = \dfrac{2(x + 2)(x - 6)}{(2x - 4)^2}$.

β) _ Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe (Γ).

γ) _ Dresser un tableau de variation de f. On vérifiera que $\begin{cases} f(-2) = -\dfrac{1}{2} \\ f(6) = \dfrac{15}{2} \end{cases}$

δ) _ Déterminer les limites suivantes : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \dfrac{1}{2}x \right] \end{cases}$

ζ) _ Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

2° _ Tracer la courbe représentative (Γ) de f.

3° _ Montrer que (Γ) admet un centre de symétrie. On rappelle que, s'il existe un point $\Omega(a, b)$ du plan tel que :

$\forall x, x + a \in D, x - a \in D$ et $f(x - a) + f(x + a) = 2b$ alors Ω est centre de symétrie du graphe de f. Dans notre cas précis, si la courbe représentative de f admet un centre de symétrie, c'est nécessairement le point $\Omega(2 ; \frac{7}{2})$. Pour le prouver, il suffit d'appliquer le principe précédent.

4° _ Montrer que l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse $x_0 = 1$, s'écrit :

$$y = -\frac{15}{2}x + \frac{5}{2}$$

5° _ Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de racines de l'équation : $x^2 + (3 - 2m)x + 6 + 4m = 0$.

On distinguera les cas où :

$\cos \frac{2\pi}{5}$ Thought is most legible, least convert during bursts of unchained, compacted energy.
La pensée n'est jamais plus lisible, moins masquée que dans les explosions d'énergie déchaînée et condensée

$m \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{15}{2}\,;\,+\infty\right[$; $m \in \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{15}{2}\right\}$ et $m \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{15}{2}\right[$, dès lors que le nombre de racines de l'équation (E coïncide avec le nombre de points d'intersection du graphe de f avec la droite d'équation $y = m$.

Rappelons que l'étude d'une fonction comporte les étapes suivantes :

a) Détermination de l'ensemble de définition ; cet ensemble est le plus souvent une réunion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

b) Étude de la continuité (abordée avec regret en terminale uniquement) et des limites aux bornes de chacun des intervalles composant l'ensemble de définition. Éventuellement, prolongement par continuité de la fonction (que vous verrez en terminale).

c) Détermination, s'il y a lieu, des asymptotes et de la position du graphe par rapport à ces asymptotes.

Branches infinies : Soit f une fonction numérique et Γ sa courbe représentative.

_ Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, on dit que Γ admet une branche infinie dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.

_ Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que Γ admet une branche parabolique de direction Oy.

_ S'il existe un couple (a, b) de nombres réels tel que : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à Γ en $+\infty$ (ou $-\infty$). Dans le cas d'une asymptote en $+\infty$, on détermine a et b par :

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \end{cases}$$

_ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est dite asymptote (au sens d'une asymptote verticale) à Γ.

_ Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \alpha$, la droite d'équation $y = \alpha$ est dite asymptote (au sens d'une asymptote horizontale) à Γ.

d) Étude de la dérivabilité de la fonction prolongée. Détermination du signe de la dérivée.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si on a $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.

e) Établissement du tableau de variation et tracé du graphe.

2° _ Montrer que (C) admet un centre de symétrie.

Symétries

Définition : Une fonction numérique f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ est dite *paire* si et seulement si :

$$\forall x \in D,\ -x \in D \text{ et } f(-x) = f(x).$$

Conséquence : Le graphe d'une fonction paire dans un repère orthonormé (ou orthogonal) est symétrique par rapport à l'axe Oy.

S'il existe un point a tel que : $\forall x,\ x + a \in D$ et $f(x + a) = f(x - a)$ alors la droite d'équation $x = a$ (parallèle à l'axe Oy) est un axe de symétrie du graphe de f dans un repère orthogonal, voire orthonormé.

Définition : Une fonction numérique f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ est dite *impaire* si et seulement si :

$$\forall x \in D,\ -x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

Conséquence : Le graphe d'une fonction impaire admet pour centre de symétrie l'origine O. S'il existe un point $\Omega(a, b)$ du plan tel que : $\forall x,\ x + a \in D$, $x - a \in D$ et $f(x - a) + f(x + a) = 2b$ alors Ω est centre de symétrie du graphe de f.

Définition : Soit T un nombre réel > 0. Une fonction numérique f, définie sur $D \subset \mathbb{R}$, est dite *périodique de période* T si et seulement si :

$$\forall x,\ (x \in D) \Leftrightarrow (x + T \in D) \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Le graphe d'une fonction périodique de période $T > 0$, est invariant par translation de vecteur $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Interprétation géométrique de la dérivée : f une fonction dérivable en x_0 signifie que la courbe représentative de f admet au point de coordonnées

$(x_0, f(x_0))$ une tangente de pente $f'(x_0)$. Une équation de cette tangente s'écrit :

$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$

Pourquoi attendre la Terminale pour aborder la continuité ? Je ne peux passer sous silence, les travaux du mathématicien Bernard Bolzano (1781 – 1859) *sur les relations entre continuité et dérivabilité. Ce savant découvre l'existence des fonctions continues mais dérivables nulle part.*

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{|x|}$ est-elle dérivable sur $]-1, 1[$?

Réponse :

On a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{|x|}} = -\infty$$

La fonction f n'est pas dérivable en x_0 (f est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$) bien qu'elle soit continue en 0.

La fonction f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

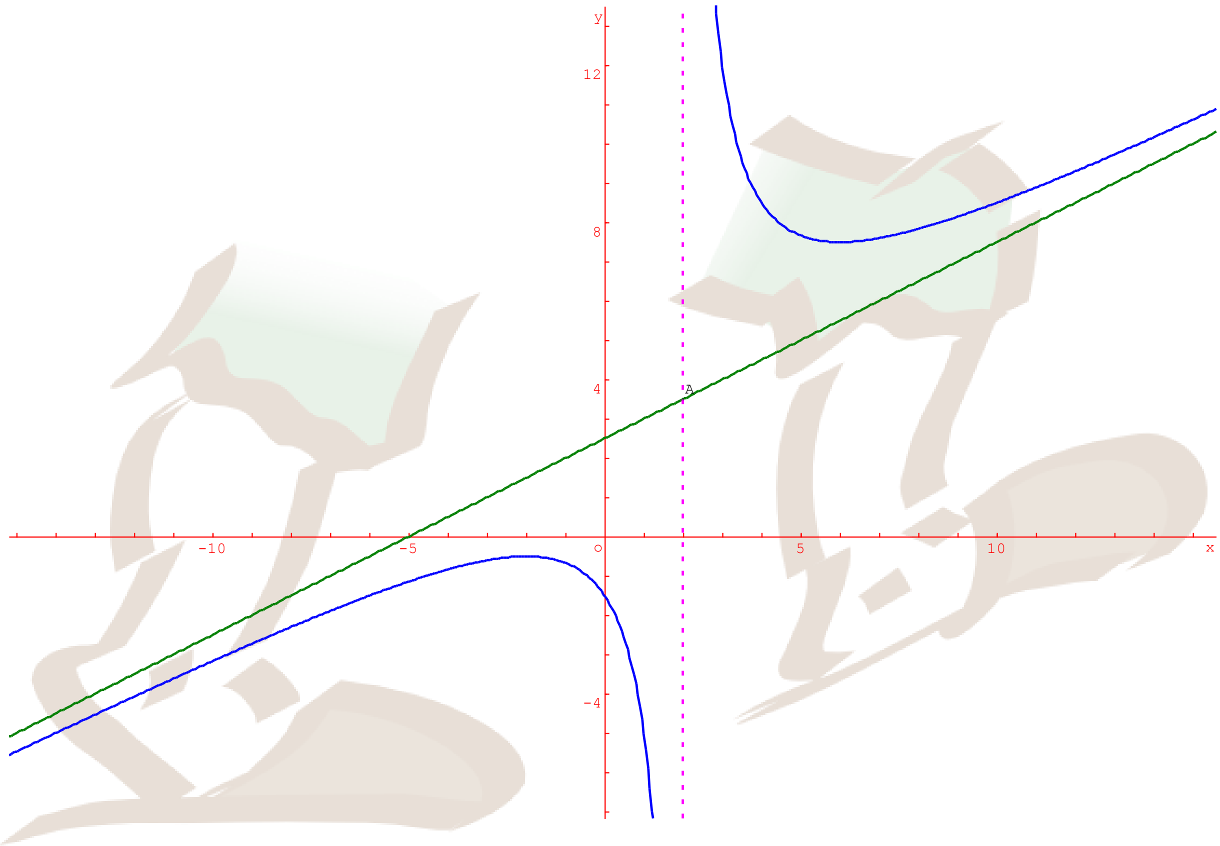
Difficile d'améliorer la simplicité de cette formulation, sa mystérieuse concision, et difficile également d'améliorer son charme intuitif.

De l'intérieure de la définition de la continuité en a, $f(a)$ doit avoir un sens, donc a appartenir au domaine de f. C'est ce que j'appelle une condition d'*intelligibilité*. La limite de $f(x)$ quand x tend vers a doit à son tour être *là*, vivante et frissonnante. Une condition d'*existence*. Et cette limite doit être la valeur de f, car la fonction ne se contente pas de tendre vers une limite ou une autre : elle vient fusionner passionnément avec elle en a. *Consommation*.

La notion de continuité se décompose ainsi en une triple notion : $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'}\textit{intelligibilité} \\ \text{d'}\textit{existence} \\ \textit{consommation} \end{array} \right.$

$\cos \frac{2\pi}{5}$

Thought is most legible, least convert during bursts of unchained, compacted energy.
La pensée n'est jamais plus lisible, moins masquée que dans les explosions d'énergie déchaînée et condensée



$\cos\frac{2\pi}{5}$ Thought is most legible, least convert during bursts of unchained, compacted energy.
La pensée n’est jamais plus lisible, moins masquée que dans les explosions d’énergie déchaînée et condensée