Il y a un beau paysage dans ma tête

Accoudé à son bureau, un jeune Agrégé d'Université lit – sa petite fille âgée alors de six mois dans ses bras –, intensément le « *Journal of Mathematical Analysis & Applications* ». Au menu : la grande méditation de l'humain, sur les thèmes de l'opérateur dit de Volterra, V défini sur l'espace de Hilbert E = $L_2[0, 1]$ par $V(x) = \int_0^x f(t)dt$, le Théorème (d'*unicellularité*), le Théorème dit de Titchmarch…bref, les plus audacieuses tentatives pour représenter le monde, ou pour le créer, au moyen de formes symboliques dont le pouvoir *dépasse* les descriptions désespérément limitées que nous employons habituellement.

Sur la table repose le petit cahier bleu, celui dans lequel il consigne tous ses désirs au sens spinoziste (*i.e. puissance d'exister, d'agir et de jouir*). On y trouve entre autre, le souvenir d'un Théorème d'Hadamard, le Problème de Gelfand rencontré quand il passait le Grand Oral du concours d'Agrégation Externe de Mathématiques, et l'ombre fuyante de la convolution des fonctions continues à support compact. Où cela le mènera-t-il ? À une liberté habitée et non aliénée par l'Autre ! Parler de soi à la troisième personne, c'est se distancier, car c'est par le détour des signes d'humanité déposés dans les œuvres de culture que j'accède au monde et à moi-même.

Dans un pari *pascalien,* je cherche une pédagogie de l'exemplaire qui puisse commencer à bâtir des ponts entre tous ces concepts. Il y a plus que le Théorème d'unicellularité *and* Co dans les Mathématiques. Mais les concepts présents dans cet article, ont le singulier pouvoir de mobiliser l'attention d'hommes et de femmes cultivés. Ils recèlent toute l'innocence d'une quête abstraite menée à bonne fin. Cette grande et puissante théorie est née à l'instant précis où l'homme a contemplé l'infini pour la première fois. Lire l'Univers, c'est s'engager dans un va-et-vient inlassable entre le réel et l'existence. On découvre par exemple que le plus intime et le plus concret sont dans les séries entières convergentes, que les espaces hilbertiens trouvent leur profondeur nette… Sans eux, sans la rencontre de mon actualité et de leur sagesse, je me perds de vue.

Rien dans notre expérience ne laisse penser que ce type de Mathématique puisse fonctionner, et la capacité de cette Théorie à unifier les divers aspects de l'expérience est la preuve alléchante mais incomplète que, parmi les portes de la perception, certaines au moins peuvent s'ouvrir et certaines peuvent mener plus loin.

La règle essentielle est qu'il ne faut pas s'ennuyer. Il doit toujours y avoir ce courage de l'errance pour payer la nouveauté. Ma lecture est métaphoriquement une méditation sur le Temps : comment l'acte mathématique condense le Temps. Le Temps est vécu de façon très intense dans ce moment. Ou alors, il est *délicieusement* interminable.

Les paroles essentielles sont des actions qui se produisent en ces instants décisifs où l'éclair d'une illumination splendide traverse la totalité d'un monde. Tenant ma petite fille dans mes bras, à un moment, je ne sais comment, le « *Journal of Mathematical Analysis & Apllications* » est tombé sur ma table. Cet article commence avec mon désir, il se termine avec quelques ''confidences'' pour ma famille, sans que je puisse le finir autrement.

Sous-espaces *Stables* par $f \longrightarrow \int_0 f(t)dt$

Partie I – Introduction

1° _ Un peu d'histoire

À son origine l'une des préoccupations fondamentales de l'Analyse Fonctionnelle était la généralisation aux espaces normés (de Hilbert puis de Banach en général), des Théorèmes connus, dans le cas de la dimension finie. La notion de somme directe topologique permet sans difficulté d'imaginer ce qu'est un opérateur diagonalisable. En revanche il est plus difficile d'appréhender ce qu'est un opérateur trigonalisable : il s'agit essentiellement d'ordonner pour l'inclusion, l'ensemble des sous-espaces stables de l'opérateur.

La Théorie de F. Riesz des opérateurs compacts est à cet égard particulièrement éclairante puisqu'elle conduit au Théorème de décomposition en sous-espaces caractéristiques (*cf.* Dieudonné, *Éléments d'Analyse,* Tome 1, Gauthier-Villars) :

Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire compact.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, E admet une décomposition en somme directe, $\mathrm{E} = \mathrm{N}(\lambda) + \mathrm{F}(\lambda)$ avec : $\mathrm{N}(\lambda)$ et $\mathrm{F}(\lambda)$ sous-espaces fermés stables par u, $\mathrm{N}(\lambda)$ de dimension finie $(u - \lambda\mathrm{Id})_{|\mathrm{N}(\lambda)}$ nilpotent, $u_{|\mathrm{F}(\lambda)}$ isomorphisme bicontinu.

La détermination des sous-espaces stables par u inclus dans $\mathrm{N}(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ se ramène donc au cas de la dimension finie.

Le cas de la valeur propre 0 est plus délicat et, du fait de la place centrale qu'occupe les opérateurs intégraux dans l'Analyse Fonctionnelle, c'est tout naturellement qu'on s'est intéressé aux sous-espaces du plus simple d'entre eux, l'opérateur dit de Volterra, V défini sur l'espace de Hilbert $\mathrm{E} = \mathrm{L}_2[0, 1]$ par $\mathrm{V}(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Mon but dans cet article est de déterminer de manière presque élémentaire tous les sous-espaces fermés de E stables par V et en tirer quelques conséquences intéressantes. Selon David Hilbert, *c'est une erreur de croire que la rigueur dans une démonstration est l'ennemi de la simplicité… L'effort même de la rigueur nous force à découvrir les méthodes de démonstration les plus simples.*

2° _ Formuler une *problématique* est l'oxygène de l'être

On considère l'espace de Hilbert $E = L_2[0, 1]$ des classes de fonctions réelles, mesurables sur [0, 1], de carré intégrable et l'opérateur de Volterra V sur E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \ V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(pour les définitions précises voir II.1). Le résultat fondamental est le :

Quand le poème s'impose au cœur, le **Théorème (d'*unicellularité*)** s'expose à l'intelligence.

Un sous-espace fermé de E est stable par V si, et seulement si, H est l'un des sous-espaces $H_0 = \{f \in E / f$ nulle $(p.p.)$ sur $[0, a]\}$ avec $a \in [0, 1]$ $(H_0 = E, H_1 = \{0\})$.

3° _ Remarques

(1) Le nom du Théorème vient du fait que V apparaît comme ''cellule de Jordan'' indexée par [0, 1]. En particulier V est indécomposable : E n'est pas la somme directe de deux-espaces fermés stables par V.

(2) Seules les définitions de E et de V ne sont pas élémentaires. Elles nécessitent soit l'intégration de Lebesgue soit l'introduction du complété de $C^0[0, 1]$ pour la norme quadratique. C'est cette seconde présentation, qui me semble plus

élémentaire (bien que moins naturelle), que j'ai choisie. Par exemple, H_a est l'adhérence pour $\| \ \|_2$ de $\{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, nulle sur $[0, a]\}$.

(3) En particulier je commencerai par quelques résultats très simples sur les fonctions de variables complexes. Le lecteur que l'utilisation de fonctions holomorphes ne gêne pas pourra sauter le II, à l'exception du II.4 sur le Théorème d'Hadamard.

Partie II _ Quelques résultats sur les fonctions de la variable complexe

1° _ Dérivation complexe

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur l'ouvert Ω est dite *dérivable au sens complexe* (ou $\mathbb{C}$-dérivables) en $a \in \Omega$ si le ''taux d'accroissement'' $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0. Lorsqu'elle existe cette limite est la valeur de la dérivée de f en a et notée $f'(a)$.

2° _ Formalisme du calcul des dérivées

On retiendra ici ce petit minimum, qui se prouve comme dans le cas réel.

Théorème 1

(1) _ Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$, f est continue en a.

(2) _ Si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$-dérivables en $a \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $f + \lambda g$, fg sont $\mathbb{C}$-dérivables en a $(f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(3) _ Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en $a \in \mathbb{C}$ avec $f(\Omega) \subset \Omega'$ et $g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en $f(a)$, alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en a et $(g \circ f)(a) = f'(a)g'[f(a)]$.

(4) _ Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-*dérivable* en a et $\phi : \mathrm{I} \longrightarrow \Omega$ définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et ($\mathbb{R}$-*dérivable* en t_0 avec $\phi(t_0) = a$. Alors $f \circ \phi$ est $\mathbb{R}$-*dérivable* en t_0 et $(f \circ \phi)'(t_0) = f'(a)\phi'(t_0)$.

On en déduit la Propriété :

Soit Ω un ouvert connexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – *dérivable* en tout point de Ω de dérivée nulle. Alors f est constante.

Preuve

Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(a, r)$ de centre a et de rayon r soit incluse dans Ω. Pour $y \in \mathrm{B}(a, r)$ la fonction réelle de variable réelle $t \in [0, 1] \longrightarrow f((1 - t)a + ty)$ est dérivable de dérivée nulle donc est constante. On en déduit que $f(y) = f(a)$. Finalement f est constante puisqu'elle est localement constante en Ω connexe.

3° _ Cas des fonctions entières

Comme pour la variable réelle on montre le :

Théorème 2 _ Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Alors f est $\mathbb{C}$- *dérivable* en tout point z du disque ouvert de convergence et on a $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$

Par sa forme et sa construction, j'espère que le lecteur découvrira peu à peu, à travers la profusion des concepts de cet article, la première cause de toute poésie : le fonctionnement nocturne et lumineux, visuel et verbal, irrécusable, de l'imaginaire.

4° _ Premier souvenir – Un Théorème d'Hadamard

Ce point est indépendant de ce qui précède mais nous sera utile par la suite. Il est usuellement prouvé de manière astucieuse à l'aide du lemme de Schwarz.

Théorème 3

Soit $d \in \mathbb{N}$. Toute fonction entière $F : \mathbb{C} \longrightarrow$ telle qu'il existe A, B, ≥ 0 vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C},\ Re F(z) \leq A\left|z\right|^d + B$$

est un polynôme de degré inférieur à d.

Ma preuve

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière (*i.e.* développable en série entière de rayon de convergence infini) telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ Re F(z) \leq A\left|z\right|^d + B$. Quitte à remplacer f par $f - a_0$, on peut supposer $a_0 = 0$.

Je pose

$$F(r, t) = 2ReF(re^{it}) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(a_n e^{int} + \overline{a_n}\, e^{-int}\right)$$

et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\phi \in \mathbb{R}$

$$g(t) = 1 + \cos(pt + \phi = 1 + \frac{e^{i\phi}}{2} e^{ipt} + \frac{e^{-i\phi}}{2} e^{-ipt}$$

Comme g est positive alors,

$$\forall r \geq 0,\ t \in \mathbb{R},\ F(r, t)g(t) \leq 2\,(Ar^d + B)g(t)$$

et en intégrant, j'obtiens aussitôt,

$$\int_0^{2\pi} F(r, t)g(t)dt \leq 2\,(Ar^d + B) \int_0^{2\pi} g(t)dt = 4\pi\,(Ar^d + B).$$

Or pour r fixé la convergence normale de la série en t permet l'intégration terme à terme à gauche. J'en déduis alors :

$$a_p e^{-i\phi} + \overline{a_p}\, e^{i\phi} \leq \frac{4(Ar^d + B)}{r^p}.$$

En choisissant pour ϕ un argument de a_p j'obtiens :

$$|a_p| \leq \frac{2\,(Ar^d + B)}{r^p}$$

ce qui, après passage à la limite $r \longrightarrow +\infty$, donne $a_p = 0$ pour $p > d$ et montre que f est polynômiale de degré au plus d.

Partie III – Quel sens donner au Théorème « d'*unicellularité* » ?

1° _ Lisons de l'*intérieur,* dans l'éclaircie de ce qui vient en présence

Le seul point délicat est la définition des intégrales.

Il existe deux points de vue possible selon que l'on considère [E, (|)], comme un espace hilbertien dont $C^0([0, 1])$ est un sous-espace dense ou comme le complété de $(C^0([0, 1]), (|))$. Dans le premier cas, on considère les opérateurs directement sur E et on montre que leurs restrictions à $C^0([0, 1])$ sont celles que l'on souhaite ; dans le second on prolonge à E des opérateurs (uniformément) continue pour $\| \ \|_2$ de $C^0([0, 1])$.

On peut en fait définir V de trois manières :

1° _ Soit il est le prolongement (uniformément) continu pour la norme quadratique de

$$V : f \in C^0([0, 1]) \longrightarrow V(f) = \int_0 f(t)dt.$$

2° _ Soit $V(h)(x)$ est le produit scalaire de h de la fonction caractéristique de $[0, x]$ (qui est dans E).

3° _ Soit $V(h)(x)$ est l'intégrale de la restriction à $[0, x] \subset [0, 1]$ d'une fonction intégrable sur $[0, 1]$ $(E \subset L^1[0, 1])$.

Je privilégierais le point de vue 1° qui nécessite le moins de connaissance sur l'intégration.

Comme est un trait de lumière, quelques **Propriétés**, avec le sens au bout.

α) _ Pour $h \in E$, $V(h)$ est définie sur $[0, 1]$.

β) _ V admet pour adjoint (pour le produit scalaire $(\mid)$, de E) V^* défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \; V^*(f)(x) = \int_x^1 f(t)dt.$$

V et V^* sont continus pour $\| \;\|_2$.

γ) _ Pour toute fonction $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$(V + V^*)(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt = (1 \mid f)1$$

(δ) _ Pour $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on a :

$$V^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

Toute leçon étant une réponse, Mes Remarques

1° _ En particulier pour $n \geq 1$ et $f \in$ E, $\mathrm{V}^n(f)$ et $(\mathrm{V}^*)^n(f)$ sont de classe C^{n-1}.

2° _ Il découle du Théorème d'Ascoli que V est compact de (E, $\| \ \|_2$) dans lui-même et aussi dans $C^0([0, 1], \| \ \|_{+\infty})$, sans valeur propre (même dans $\mathbb{C}$). La théorie de Riesz ne donne donc aucune information sur V.

De la ligne d'ombre à la ligne de risque : Mes preuves

(α) V est le prolongement continu de

$$\mathrm{V} : f \in C^0([0, 1]) \longrightarrow \mathrm{V}(f) = \int_0 f(x)dx$$

Alors si h est limite quadratique de la suite (f_n) de $C^0([0, 1])$, on voit que la suite $(\mathrm{V}(f_n))$ est uniformément de Cauchy car on a :

$$\forall x \in [0, 1], \left|\mathrm{V}(f_n)(x) - \mathrm{V}(f_m)(x)\right| \leq \int_0^x \left|f_n(t) - f_m(t)\right| dt \leq \| f_n - f_m \|_2.$$

Notons H $\in C^0([0, 1])$, sa limite. La suite $(\mathrm{V}(f_n))$ tend aussi vers H pour la norme quadratique (car $\| \ \|_2 \leq \| \ \|_{+\infty}$) donc $\mathrm{V}(h) = \mathrm{H}$ est définie et continue.

(β) Pour $h \in$ E continue, notons $\mathrm{V}^*(h)$ l'application $x \longmapsto \int_0^1 h(t)dt$.

Comme ci-dessus, on voit que $\mathrm{V}^*(h)$ est définie et continue et que V* se prolonge à E. Il s'agit de montrer que si $fg \in$ E, alors :

$$\int_0^1 \mathrm{V}(f)(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)\mathrm{V}^*(g)(t)dt$$

Si f, g sont continues, cela résulte d'une intégration par parties. Le cas général découle de la densité de $C^0([0, 1])$ dans E et de la continuité de V et V* pour $\| \ \|_2$.

Pour $h \in C^0([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$ on a :

$$\left|V(h)(x)\right| \leq \int_0^x \left|h(t)\right|dt \leq \sqrt{x}\,\|h\|_2 \leq \|h\|_2$$

d'où $\|V(h)\|_2 \leq \|h\|_2$ et un résultat analogue pour $V^*(h)$.

(γ) L'égalité est évidente pour f continue ; elle se prolonge à E par densité.

(δ) Pour f continue ces égalités découlent des formules de Taylor : $F = V^n(f)$ est la primitive d'ordre n de f telle que $F^{(k)}(0) = 0$ si $k \leq n-1$. Pour $f \in E$ elles s'obtiennent par un passage à la limite comme au (α).

2° _ Ma ligne d'horizon en *Notations*

Il suffit de montrer que tout sous-espace fermé H de E stable par V est de la forme H_0

Pour cela considérons un tel espace H et G son orthogonal, G est stable par V* et, comme E est complet et H fermé dans E, c'est un supplémentaire de H.

Considérons aussi :

- La décomposition de la fonction constante 1 sur la somme supplémentaire $H+G$ telle que $1 = h_0 + g_0$ avec $h_0 \in H$, $g_0 \in G$,
- $a = \int_0^1 g_0(t)dt$, qui est dans [0, 1] car

$$a = (1 \mid g_0) = (g_0 \mid g_0) = \|g_0\|_2^2, \text{ et } 1 - a = \|h_0\|_2^2.$$

- Les fonctions entières A, F définies par

$$A(z) = \int_0^1 e^{zt} g_0(t)dt, \quad F(z) = 1 + zA(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n z^n$$

où M_n est le moment (modifié) de g_0 : $M_n = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 t^{n-1} g_0(t)dt$.

3° – « C'est de l'assemblage des atomes que naissent toutes les qualités sensibles » dit Démocrite _ Ma preuve de F(z)F(– z) = 1.

α) _ Un lemme

Lemme _ pour tout endomorphisme W de E stabilisant H et tout g ∈ G, on a :

$$(W(g_0)|g_0)(g|g_0) = (w \circ (V + V^*)(g)|g_0).$$

Le Théorème est fait pour être prouvé : Ma démonstration

Pour g ∈ G, on a $(V + V^*)(g) = \int_0^1 g(t)dt = (g|1)1 = (g|g_0)1.$

Ce qui donne $(W \circ (V + V^*)(g|g_0)(W(1)|g_0) = (g|g_0)(W(g_0)|g_0).$

β) _ Calcul de $A(z)A(-z)$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $A(z) = \int_0^1 e^{zt} g_0(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (V^n(1)|g_0)$ et donc, puisque H est stable par V,

$$\int_0^1 e^{zt} g_0(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (V^n(g_0)|g_0).$$

D'après un calcul préliminaire on a

$$\forall f \in E, \forall x, \left|V^n(f)(x)\right| \leq \|f\|_2 \sqrt{\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(n-1)!} dt} \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{(n-1)!}}.$$

J'en déduis que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n V^n$ converge (dans l'algèbre de Banach des endomorphismes continus de E) vers $(Id - zV)^{-1}$. Pour $z \in \mathbb{R}$ on a donc :

$$A(z) = ((\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1}(g_0) | g_0) = (g_0 | (\mathrm{I}d - z\mathrm{V}^*)^{-1}(g_0))$$

et, d'après le lemme ci-dessus,

$$A(z)A(-z) = (\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1}(g_0) | g_0)(\mathrm{I}d + z\mathrm{V}^*)^{-1}(g_0) | g_0)$$

$$= (\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1}(\mathrm{V} + \mathrm{V}^*)(\mathrm{I}d + z\mathrm{V}^*)^{-1}(g_0) | g_0).$$

Or, pour $z \in \mathbb{R}$, on a

$$z(\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1}(\mathrm{V} + \mathrm{V}^*)(\mathrm{I}d + z\mathrm{V}^*)^{-1} = (\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1}(z\mathrm{V} - \mathrm{I}d + z\mathrm{V}^* + \mathrm{I}d)(\mathrm{I}d + z\mathrm{V}^*)^{-1}$$

$$= (\mathrm{I}d - z\mathrm{V})^{-1} - (\mathrm{I}d + z\mathrm{V}^*)^{-1}$$

donc on a

$$zA(z)A(-z) = A(z) - A(-z)$$

et donc

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(z)\mathrm{F}(-z) = 1 + zA(z) - zA(-z) - z^2A(z)A(-z) = 1.$$

Comme $z \longmapsto \mathrm{F}(z)\mathrm{F}(-z)$ est une fonction entière, ses coefficients sont nuls pour $n \geq 1$ et l'identité s'étend à $\mathbb{C}$.

4° _ Dans l'isolement du chercheur solitaire, ce qui compte avant tout c'est de ne pas reculer devant la preuve de F(z) = *exp* (αz) qui s'écrit et qu'il faut entendre.

$z \longmapsto \dfrac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)} = \mathrm{F}'(z)\mathrm{F}(-z)$ est une fonction entière. Considérons la fonction entière G nulle en 0 et de $\mathbb{C}$ – dérivée $\dfrac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)}$.

Partant de 3°, j'en déduis $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{F}(z) = exp(\mathrm{G}(z))$ (c'est vrai en $z = 0$ et les $\mathbb{C}$-dérivées sont égales). Par ailleurs la définition de F donne :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^{R(\mathrm{G}(x))} = |\mathrm{F}(z)| \leq 1 + |z| \| g_0 \|_2 \left(\int_0^1 e^{2R(z)t} dt\right)^{1/2} \leq 2exp(2|x|)$$

On a donc $\forall z \in \mathbb{C},\ R(G(z)) \leq 2|x| + C$.

D'après le Théorème d'Hadamard cité plus haut, j'en déduis que G est un polynôme de degré au plus 1. Comme G(0) = 0 et F(0) = α, j'obtiens bien, G(z) = αz.

5° _ description de H

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n \left(g_0 - \chi_{[0,\,a]}\right)(t)dt = 0$ comme l'espace des fonctions polynomiales est dense dans L²[0, 1], j'en déduis que $g_0 = \chi_{[0,\,a]}$ et $h_0 = \chi_{[a,\,1]}$.

La stabilité de H (*resp.* de G) par V (*resp.* par V*) montre que H contient les applications $t \longmapsto [(t-a)^+]^n$ (où x^+ désigne la partie positive de x) donc toute les fonctions nulles (*p.p.*) sur [0, a] et que G contient les applications $t \longmapsto [(t-a)^+]^n$ donc toute les fonctions nulles (*p.p.*) sur [a, 1] ce qui termine ma preuve.

Partie IV _ La théorie est une aventure physique et philosophique qui a pour but la poésie pratique, d'où ces quelques applications.

Je présente ici quelques résultats découlant facilement du Théorème d'*unicellularité*.

1° _ Du nouveau sous le Soleil : Problème de Gelfand

Théorème 4 _ Soit $f \in L_2[0, 1]$. L'espace vectoriel engendré par $\{V^n(f) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $f \in L_2[0, 1]$ si et seulement si, 0 est dans le support de f.

Remarque : Le support de f peut être défini par exemple par :

$$supp(f) = \{a \in [0,\ 1] \,/\, \forall\alpha > 0 : \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} |f(t)|^2 dt > 0$$

Ma preuve

Soit F l'adhérence du sous-espace engendré par les $\{V^n(f) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Comme V est continue F est stable par V. F est donc un sous-espace H_a. je vais étudier les deux cas.

Si 0 est dans le support de f, f n'est pas nulle (*presque partout*) au voisinage de 0 donc $a = 0$ et F = E.

Si 0 n'est pas dans le support de f, f est nulle (*presque partout*) sur un intervalle $[0, a]$ et pour tout n, $V^n f$ est aussi nulle sur $[0, a]$ donc $a > 0$ et $F \neq E$. L'équivalence annoncée est établie.

2° _ Clair-obscur des fonctions continues

Théorème 5

Les sous-espaces de $C^0([0, 1])$ et ceux de la forme $X_a = \{f \,/\, f \equiv 0 \text{ sur } [0,\ a]\}$ pour un $a \in [0, 1]$.

Ma preuve

Les sous-espaces ci-dessus sont fermés et stables par V.

Inversement, soit X un tel sous-espace et H son adhérence dans E pour $\|\ \|_2$.

J'ai montré au (*cf.* II-1) que si $h \in$ E est limite quadratique d'une suite (f_n) de fonctions continues alors $V(f_n)$ converge uniformément vers $V(h)$. J'en déduis que si $h \in$ H alors $V(h)$ est X donc dans H. On voit donc que $V(H) \subset X \subset H$ et en particulier que H est stable par V.

Si $H = H_a$ avec $a \in]0, 1[$ on a $X \subset H_a \cap C^0([0, 1]) = X_a$ et, comme H_a contient $f = \chi_{[0, a]}$, X contient $V(f) : x \longmapsto (x - a)^+$ et plus généralement les fonctions $x \longmapsto ((x - a)^+)^n$. Grâce au corollaire suivant du Théorème de Weierstrass :

Toute fonction continue sur $[a, 1]$ et nulle en a est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales nulles en a.

{si (P_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$, $(P_n - P_n(a))$ convient}.

Il en résulte que $X_a \subset X$ soit $X = X_a$.

Si $H = H_0 = E$ comme ci-dessus, il est clair que $V(H)$ contient tous les polynômes nuls en 0 donc son adhérence pour la convergence uniforme contient toutes les fonctions continues nulles en 0 soit X_0.

On a donc la double inclusion $X_0 \subset X \subset C^0([0, 1])$, ce qui, comme X_0 est un hyperplan de $C^0([0, 1])$, donne les deux dernières possibilités :

$$X = C^0([0, 1]) \text{ ou } X = X_0.$$

3° _ Chimère de Convolution

Je vais munir $C^0([0, 1])$ de la loi de convolution définie par :

$$\forall f, g \in C^0([0, 1]),\ f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Propriétés _ $\{C^0([0, 1]), +, \ldots, *, \|\ \|_{+\infty}\}$ est une algèbre de Banach, commutative, associative (non unitaire) et l'opérateur V est alors la convolution par la fonction constante 1.

Preuve _ Seule l'associativité demande une preuve. Si on ne dispose pas d'une théorie sérieuse des intégrales doubles elle découle du classique :

Lemme _ soient a, b deux réels et $T = \{(x, y) \ / \ a \le x \le y \le b\}$ et $\varphi : T \longrightarrow c$ une application continue. On a

$$\int_a^b \left[\int_a^y \varphi(x, y)dx\right]dy = \int_a^b \left[\int_x^b \varphi(x, y)dy\right]dx$$

Ma preuve du Lemme

C'est trivial lorsque φ ne dépend pas de y.

Si φ est nulle sur la diagonale, on la prolonge de manière symétrique au carré $[a, b]^2$.

La formule découle alors de l'interversion des intégrations pour une intégrale double.

Dans le cas général, on écrit $\varphi(x, y) = \{\varphi(x, y) - \varphi(x, x) + \varphi(x, x)\}$.

Comme corollaire immédiat du Théorème 5 on a :

Théorème 6 _ Les idéaux fermés de $\{C^0([0, 1]), +, \ldots, *, \|\,\|_{+\infty}\}$ sont les X_a.

4° _ Pli et nœud du Théorème de Titchmarch

Théorème 7

(1) _ Soient f, g : $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0, 1]$, $\int_0^x f(t)g(x-t)dt = 0$,

$$\text{alors, } \begin{cases} \textit{soit} \text{ l'une des fonctions } f, g \text{ est nulle} \\ \ldots\ldots. \\ \textit{soit } \exists\, a \in]0, 1[\ / \begin{cases} f_{[0,a]} = 0 \\ g_{[a,1]} = 0 \end{cases} \end{cases} .$$

(2) _ Soient f, g : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^x f(t)g(x-t)dt = 0$, alors l'une des fonctions f, g *est nulle*.

Ma preuve de (1)

Je fixe un couple (h, g) de fonctions continues sur [0, 1] telles que $\forall x \in [0, 1]$, $\int_0^x f(t)g(x-t)dt = 0$.

Soit $X = \{h \,/\, f * h = 0\} = \{h \in C^0([0, 1]) \,/\, \forall x \in [0, 1],\ \int_0^x f(t)h(x-t)dt = 0\}$. Il est clair que X est un sous-espace de $C^0([0, 1])$ fermé pour la convergence uniforme. En outre si $h \in X$ on a

$$V(h) * f = (1 * h) * f = 1 * (h * f) = 0$$

Ce qui montre que X est stable par V.

Si $X = C^0([0, 1])$, alors en prenant $h(t) = f(1-t)$ on a $\int_0^1 f^2(t)dt$ donc $f = 0$.

Si $X = X_a$, comme g ∈, on a $g_{|[0,\, a]} = 0$. Si $a = 1$ on a $g = 0$ sinon pour toute fonction $h \in X_a$ on a $\int_0^1 f(t)h(1-t)dt = 0$ et donc toute fonction φ continue sur [0, 1] nulle sur $[1-a, 1]$ on a $\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt = 0$, ce qui donne $f_{|[0,\, 1-a]} = 0$.

Preuve (2) _ Supposons $f(x_0) \neq 0$ avec $x_0 \geq 0$. Le point (1) (et un changement de variable) montre que pour tout $c > x_0$, g est nulle sur $[0, c-a]$.

On a donc
$$\begin{cases} soit\ f = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ soit\ g = 0 \end{cases}.$$

Pour Solal, Hannah et Marie

S'instruire en lisant

Après la lecture d'un beau livre de maths, je garde avec la théorie un contact aigu, géométrique, mobile, lisse… Cette jonction a lieu malgré moi : elle se glisse sous ma peau, apparaît dans chacun de mes repos et à chacune de mes promenades… Il y a une rotation qui ne peut être qu'à la fois celle de l'ensemble et la mienne, une façon de me frayer un chemin à travers les noms connus et appris, d'accueillir le flot des concepts, d'appréhender et de m'approprier leurs sens, leurs saveurs…

Quelle étincelle quelle lueur, quel son, quelle semence apportent les Théorèmes d'unicellularité et de Titchmarch dans l'Analyse Fonctionnelle ? Scansion où je suis à la fois lecteur et acteur… Je peux, depuis ce rythme, me relever lentement, rassembler mon pan d'espace, sentir la colonne d'os s'assouplir en moi, les mains retrouver leurs doigts, les yeux s'adapter aux yeux circulaires, les poumons s'insérer dans le battement alvéolaire du jour… Le réseau où je m'éveille est donc à chaque fois plus relâché, plus accueillant… Tout ce que j'ai médité, joué, tenté ou imaginé se réduit maintenant à un intervalle (traduisez un article), un bord (un exposé par exemple), et c'est comme si l'air s'ouvrait avec moi, derrière ma poitrine, mon ombre, l'infini diffusé partout non sans effort, et la démonstration a lieu en effet crayon à la main et je suis là comme une ponctuation double tandis que la précision des explications globales des faits apparemment sans lien (la théorie où s'insère mon travail) suspendues dans le vide permettent de surveiller le procès en cours… Tournant autour de mon histoire, s'insinuant en elle et la comprenant, touchant mon apparition provisoire.

La texture – des lignes rédigées jour après jour – porte pour ainsi dire, mes rêves, mon désir, mon cheminement, mes batailles, ce qui dans une Théorie, est appelé ''sacré'' au sens d'admirable, ''énigme'' quand un voile opaque recouvre encore certains concepts, ''secret'' tant que le sens n'est pas encore dévoilé… Et je respire là-dedans sans mystère, je sens déjà le continuum qui fait de moi un trait parmi d'autres traits.

Encore une fois, il s'agit du concret le plus concret, de la quotidienneté la plus quotidienne, vécus dans un engagement radical, aux antipodes de toute routine et de tout découragement.

Joie, Magnificence

S'il me fallait dire peut-être impudiquement, le sentiment dominant qui m'accompagne en continu, je dirais que j'aime la Mathématique parce qu'elle porte en elle cette aventure de la traversée du fleuve, cette richesse, ce trésor que je n'ai jamais pu épuiser, puisqu'il contient le virtuel de l'apprentissage, l'univers de la tolérance et le scintillement solaire de la l'attention. Je ne connais rien de meilleure qu'elle, de plus large, plus chaud, plus profond ni plus extensif, lumineux, rien qui rende plus intelligent, rien qui comprenne mieux les choses de la science, les moyens de les modéliser, qui permet de mieux vivre et d'accéder à la beauté rare, je lui ai donné ma vie, mon corps, mon temps, mes plaisirs, mes nuits et mes aventures, mes amours même, elle les a pris et me les a rendus magnifiés.

Paix et vie par l'invention : *Trouver*

Fragile, nu, en porte à faux, le chercheur solitaire ne se fie qu'à un talent qui n'a jamais la solidité d'une méthode routinière. En ce sens, j'explore seul. Je peux donc manquer, me tromper ou me perdre. Je porte cette erreur possible et cette chute éventuelle comme des blessures au flanc d'une œuvre encore en chantier. Douleur, courage de l'errance pour payer la nouveauté. Car se présentent tous les matins des façons étranges, imprévisibles, et attirantes et belles que je me lève, en hâte, à l'aurore, enthousiaste des paysages à traverser, pressé de reprendre le voyage dans un monde rarement familier, souvent extraordinaire. Je ne sais jamais qui va entrer dans ma prochaine page blanche. Tant pis pour la chute, je teste ! Si je perds, je n'aurai fait de tort à personne et si je gagne je me réjouirai. Au diable les fautes, j'essaie.

Apprentissage

Mes très chers petits, j'essaie de vous apprendre par ces quelques lignes, une bonhomie dont la hauteur encore me domine. Il faut donc apprendre, en même temps, ce que l'on comprend et ce que l'on ne comprend pas : dans le premier cas, la durée disparaît, alors que le dernier la produit.

Surgissement

Mes très chers enfants, au lieu de dire tout le temps que le temps passe, il vous faudrait pouvoir dire qu'il *surgit*. Car, le sublime accueille le surgissement, l'instant du surgissement, qui cherche sa langue, sa musique propre. Il s'agit d'entendre, dans le rythme d'une belle théorie, les chocs et contre-chocs de ses chromatismes, les contrepoints et les harmoniques de son art de la fugue.

Chaque belle théorie est le récit de son propre surgissement, dans une course de vitesse avec le langage. J'essaie de montrer que *celle-ci* joue de la coïncidence entre l'acte de composition et le récit. Elle est en quelque sorte, l'élaboration conceptuelle d'une construction géométrique. Elle révèle, pour ainsi dire, l'inscription de la lecture dans l'appropriation du récit.

Allure, fougue et contretemps : n'est-ce pas là, les éléments déterminants pour un art du sublime, dès lors que l'universitaire, dans sa démesure magnifique, cherche à imposer sa musique des concepts dans l'histoire des concepts ?…

Théo Héikay-Universitaire/pdf